9 Der Riemann'sche Krümmungstensor

Bevor wir weitere physikalische Ergebnisse der ART wie Gravitationswellen oder die „Verwirbelung" der Raumzeit durch rotierende Massen diskutieren, wollen wir uns in den nächsten Vorlesungen mit der Einstein'schen Feldgleichung beschäftigen. Die hat, wie wir ja schon in der 1. Vorlesung angekündigt haben, die Form

$$\begin{pmatrix}\text{Maß für die lokale}\\ \text{Krümmung der RZ}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Maß für die Masse-}\\ \text{Energiedichte}\end{pmatrix},$$

wobei auf beiden Seiten der Gleichung tensorielle Größen stehen müssen. In dieser Vorlesung geht es um die linke Seite, also um ein tensorielles Maß für die lokale Krümmung der Raumzeit. Dieses Maß wird der Riemann'sche Krümmungstensor sein.

9.1 Die kovariante Ableitung

Bisher haben wir die gekrümmte Raumzeit mit der Metrik $g_{\mu\nu}(\underset{\sim}{x})$ beschrieben. Die Metrik ist zwar eine tensorielle Größe, kann aber durch geeignete Wahl der Koordinaten immer in die Form $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ der flachen Raumzeit gebracht werden. Darüberhinaus können die Koordinaten auch noch gewählt werden, daß die ersten Ableitungen der Metrik verschwinden (lokales Inertialsystem). Damit scheiden sowohl die Metrik als auch ihre ersten Ableitungen als **lokales**, tensorielles Maß der Krümmung aus. Die Metrik ist allerdings ein **globales** Maß der Krümmung, aber das hilft uns bei der Formulierung der Einstein-Gleichung als Differentialgleichung nicht weiter.

Die zweiten Ableitungen der Metrik lassen sich im Allgemeinen nicht durch die Wahl des Koordinatensystems zum Verschwinden bringen. Die zweiten Ableitungen von $g_{\mu\nu}$ sind deshalb ein aussichtsreicher Kandidat zur Beschreibung der lokalen Krümmung. Das entspricht auch der Diskussion in der 1. Vorlesung, wonach sich das Wesen der Gravitation in den Gezeitenkräften manifestiert, d.h. in den zweiten Ableitungen des Potentials.

Dabei gibt es aber ein Problem: Die naive Ableitung eines Tensors ist im Allgemeinen kein Tensor! Betrachten wir dazu, wie sich die Ableitung eines Vierervektors bei Koordinatentransformation verhält:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A'^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} &= \frac{\partial}{\partial x'^{\nu}}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}A^{\alpha}\right) = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}A^{\alpha}\right)\\ &= \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial^2 x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\alpha}}A^{\alpha} + \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x\alpha}\left(\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)\end{aligned} \tag{9.1}$$

Der zweite Term entspricht der Transformation eines Tensors zweiter Stufe, aber der erste Term stört dieses Bild. Er verschwindet nur bei linearen Koordinatentransformationen. Die naive Ableitung eines Vektors ist also kein Tensor, and dasselbe gilt für die Ableitung von Tensoren höherer Stufe.

Zur Erinnerung: die Ableitung eines Skalars **ist** ein (kovarianter) Vektor:

$$\left(\partial'_\mu \phi\right) = \frac{\partial \phi}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \left(\partial_\nu \phi\right) \tag{9.2}$$

Was also geht schief bei der Ableitung von Vektoren oder Tensoren? Antwort: Deren Koordinaten hängen von der Koordinatenbasis ab. Bei krummlinigen Koordinaten ist die Koordinatenbasis aber nicht konstant! Um diesen Effekt zu berücksichtigen, führen wir Koeffizienten $\Gamma^\nu_{\alpha\mu}$ ein, so daß

$$\frac{\partial \underset{\sim}{e}_\mu}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\nu_{\alpha\mu} \underset{\sim}{e}_\nu \,. \tag{9.3}$$

Das geht immer, denn die infinitesimale Änderung eines Vektors $\underset{\sim}{e}_\alpha$ ist wiederum ein Vektor, der sich als Linearkombination der lokalen Koordinatenbasis darstellen läßt. Wir haben für die Koeffizienten den gleichen Namen gewählt wie für die Christoffel-Symbole, denn wir werden gleich sehen, daß die in (9.3) definierten Größen Γ tatsächlich die Christoffel-Symbole sind. An dieser Stelle können wir aber schon feststellen, daß sich die Basisvektoren des „geradlinigen" Koordinatensystems, d.h. die kartesische Basis im LIS, nicht ändern:

$$\Gamma^\nu_{\alpha\mu} = 0 \quad (\text{LIS})\,. \tag{9.4}$$

Mit Hilfe der Symbole Γ können wir die infinitesimale Änderung eines Viererverktors wie folgt berechnen:

$$\mathrm{d}\underset{\sim}{A} = \mathrm{d}\left(A^\mu \underset{\sim}{e}_\mu\right) = \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} \mathrm{d}x^\alpha\right) \underset{\sim}{e}_\mu + A^\mu \frac{\partial \underset{\sim}{e}_\mu}{\partial x^\alpha} \mathrm{d}x^\alpha \,,$$

bzw. mit (9.3) und der Umbenennung von Indizes $\mu \leftrightarrow \nu$ im zweiten Term,

$$\mathrm{d}\underset{\sim}{A} = \left[\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} A^\nu\right] \underset{\sim}{e}_\mu \mathrm{d}x^\alpha =: \left(\nabla_\alpha A^\mu\right) \underset{\sim}{e}_\mu \mathrm{d}x^\alpha \tag{9.5}$$

Die so definierte Größe

$$\nabla_\alpha A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} A^\nu \tag{9.6}$$

heißt **kovariante Ableitung** eines Vektorfeldes. Sie ist ein Tensor 2. Stufe, denn laut (9.5) ist $\nabla_\alpha A^\mu \mathrm{d}x^\alpha$ ein Tensor 1. Stufe (Vektor).

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors gegeben ist durch

$$\nabla_\alpha B_\mu = \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\alpha} - \Gamma^\nu_{\alpha\mu} B_\nu \,. \tag{9.7}$$

Einziger Unterschied ist hier also nur das Minuszeichen vor den Γ Symbolen. Das Schema für die kovariante Ableitung genereller Tensoren verdeutlichen wir am Beispiel eines Tensors 3. Stufe:

$$\nabla_\alpha T^{\mu\nu}{}_\sigma = \frac{\partial T^{\mu\nu}{}_\sigma}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} T^{\beta\nu}{}_\sigma + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} T^{\mu\beta}{}_\sigma - \Gamma^\gamma_{\alpha\sigma} T^{\mu\nu}{}_\gamma \tag{9.8}$$

Jeder kontravariante Index führt zu einem $+\Gamma$ Term, jeder kovariante Index zu einem $-\Gamma$ Term. Da Skalare keinen Index haben, ist bei ihnen die kovariante Ableitung identisch mit der gewöhnlichen Ableitung.

Aus der Definition der Γ Symbole (9.3) ist das nicht sofort ersichtlich, aber sie sind symmetrisch bezüglich der unteren Indizes,

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}\,. \tag{9.9}$$

Zum Beweis betrachten wir die zweifache kovariante Ableitung eines Skalars:

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \nabla_\mu \left(\partial_\nu \phi\right) = \partial_\mu \partial_\nu \phi - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \left(\partial_\alpha \phi\right) \tag{$*$}$$

In einem LIS reduziert sich das auf

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \partial_\mu \partial_\nu \phi \qquad \text{(LIS)}$$

Die rechte Seite ist natürlich symmetrisch. Folglich gilt im LIS

$$\nabla_\mu \nabla_\nu \phi = \nabla_\nu \nabla_\mu \phi\,.$$

Das ist aber eine Tensorgleichung, d.h. sie gilt unabhängig vom Koordinatensystem. Damit muß ($*$) symmetrisch sein unter unter der Vertauschung $\mu \leftrightarrow \mu$, und das Gleiche gilt dann auch für $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$.

Wenn man (9.3) mit $\underset{\sim}{e}_\rho$ multipliziert und die Symmetrie (9.9) sowie $g_{\mu\nu} = \underset{\sim}{e}_\mu \cdot \underset{\sim}{e}_\nu$ verwendet, so kann man zeigen, daß

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left[\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right]\,. \tag{9.10}$$

Das heißt, die in (9.3) definierten Größen Γ sind tatsächlich die Christoffel-Symbole aus der Geodätengleichung.

Mit der kovarianten Ableitung können wir auch die zweite Definition einer Geodäte als „lokal gerade" Kurve formulieren und zeigen, daß sie äquivalent ist zur ersten Definition als Extremum der Eigenzeit. Die Vierergeschwindigkeit $\underset{\sim}{u} = \mathrm{d}\underset{\sim}{x}/\mathrm{d}\tau$ ist immer tangential zur Kurve $\underset{\sim}{x}(\tau)$. „Lokal gerade" heißt, daß sich $\underset{\sim}{u}$ bei einem infinitesimalen Schritt nicht ändert:

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}\underset{\sim}{u}}{\mathrm{d}\tau} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(u^\mu \underset{\sim}{e}_\mu\right) = \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}\tau}\underset{\sim}{e}_\mu + u^\mu \frac{\mathrm{d}\underset{\sim}{e}_\mu}{\mathrm{d}\tau} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2}\underset{\sim}{e}_\mu + \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}\cdot\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau}\frac{\partial \underset{\sim}{e}_\mu}{\partial x^\nu} \\
&\overset{(9.3)}{=} \left[\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau}\right]\underset{\sim}{e}_\mu \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau}\frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} = 0
\end{aligned}$$

Das ist aber genau die Geodätengleichung, die wir aus der Forderung extremaler Eigenzeit erhalten hatten. Beide Definitionen sind also äquivalent.

9.2 Die geodätische Abweichung

Für die kovariante Ableitung der Metrik gilt

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} \overset{\text{LIS}}{=} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \overset{\text{LIS}}{=} 0\,,$$

d.h. die Tensorgleichung

$$\nabla_\alpha g_{\mu\nu} = 0 \tag{9.11}$$

gilt unabhängig vom Koordinatensystem. Die 1. kovariante Ableitung der Metrik taugt also nicht zur Beschreibung der Krümmung, aber das wußten wir ja schon.

Schon in der 1. Vorlesung hatten wir gesehen, daß sich die Gravitation (und damit die Krümmung der Raumzeit) in den Gezeiteneffekten manifestiert. Letztere zeigen sich darin, daß zwei benachbarte, lokal parallele Geodäten nicht parallel bleiben. Erinnerung: Euklid's Parallelen-Postulat gilt nicht in gekrümmten Räumen.

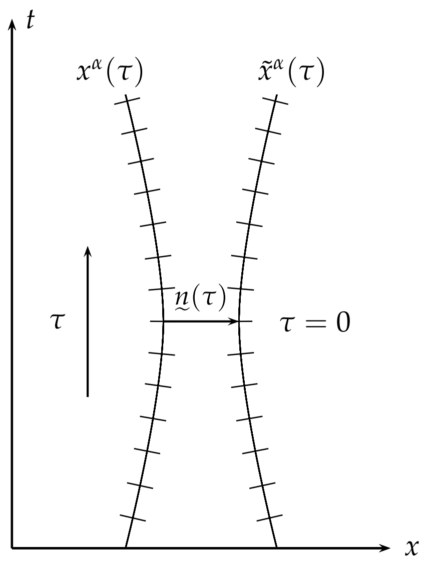

Abbildung 9.1: Geodätische Abweichung

Wir betrachten deshalb zwei benachbarte Geodäten $\underset{\sim}{x}$ und $\tilde{\underset{\sim}{x}}$ (Abb. 9.2). Dabei sei τ die Eigenzeit des Teilchens mit der Geodäte $\underset{\sim}{x}(\tau)$. Wenn die Teilchen bei $\tau = 0$ infinitesimal nahe beieinander und parallel sind, ist τ auch Eigenzeit des Teilchens mit Geodäte $\tilde{\underset{\sim}{x}}$. Die **geodätische Abweichung** ist die Differenz der Trajektorien zur selben Eigenzeit,

$$\underset{\sim}{n}(\tau) = \tilde{\underset{\sim}{x}}(\tau) - \underset{\sim}{x}(\tau)\,.$$

Beide Trajektorien erfüllen daher die Geodätengleichung

$$0 = \frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad 0 = \frac{d^2 \tilde{x}^\alpha}{d\tau^2} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \frac{d\tilde{x}^\mu}{d\tau}\frac{d\tilde{x}^\nu}{d\tau} \tag{9.12}$$

$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu}$ ist dabei das Christoffel-Symbol entlang $\tilde{\underset{\sim}{x}}$. Für infinitesimal benachbarte Trajektorien können wir entwickeln,

$$\tilde{\Gamma}^\alpha_{\mu\nu} \cong \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + n^\sigma \left[\partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right]$$

und erhalten so aus der Geodätengleichung für $\tilde{\underset{\sim}{x}} = \underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{n}$

$$0 = \frac{d^2(x^\alpha + n^\alpha)}{d\tau^2} + \left[\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + n^\sigma \left(\partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right)\right] \frac{d(x^\mu + n^\mu)}{d\tau}\frac{d(x^\nu + n^\nu)}{d\tau}\,.$$

Wenn wir das ausmultiplizieren, nur die Terme bis zur linearen Ordnung in n^α verwenden und die Geodätengleichung für $\underset{\sim}{x}$ einsetzen, so erhalten wir

$$0 = \frac{d^2 n^\alpha}{d\tau^2} + 2\Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu \frac{dn^\nu}{d\tau} + n^\sigma \left(\partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) u^\mu u^\nu \tag{9.13}$$

Nun ist $d^2 n^\alpha / d\tau^2$ aber nicht die wahre geodätische Abweichung. Um die zu erhalten, müssen wir die neben der Änderung der Koordinaten auch die Änderung der Basisvektoren berücksichtigen:

$$\left(\frac{d\underset{\sim}{n}}{d\tau}\right)^\alpha = \frac{d}{d\tau}(n^\alpha \underset{\sim}{e}_\alpha) = \frac{dn^\alpha}{d\tau}\underset{\sim}{e}_\alpha + n^\alpha \frac{d\underset{\sim}{e}_\alpha}{d\tau} = \frac{dn^\alpha}{d\tau}\underset{\sim}{e}_\alpha + n^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{d\underset{\sim}{e}_\alpha}{dx^\mu}\,.$$

Wenn wir darin $u^\mu = dx^\mu / d\tau$ und (9.3) einsetzen, so erhalten wir

$$\left(\frac{d\underset{\sim}{n}}{d\tau}\right)^\alpha = \frac{dn^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu n^\nu \tag{9.14}$$

und folglich für die 2. Ableitung

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2\underset{\sim}{n}}{d\tau^2}\right)^\alpha &= \frac{d}{d\tau}\left[\frac{dn^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu n^\nu\right] + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} u^\sigma \left[\frac{dn^\nu}{d\tau} + \Gamma^\nu_{\beta\gamma} u^\beta n^\gamma\right] \\ &= \frac{d^2 n^\alpha}{d\tau^2} + \frac{d\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{d\tau} u^\mu n^\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{d\tau} n^\nu + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu \frac{dn^\nu}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} u^\sigma \frac{dn^\nu}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\nu_{\beta\gamma} u^\sigma u^\beta n^\gamma\end{aligned} \tag{9.15}$$

Wenn wir darin in den beiden Termen ganz rechts den Index σ durch μ ersetzen und

$$\frac{d\Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{d\tau} = \frac{dx^\sigma}{d\tau}\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} = u^\sigma \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \tag{9.16}$$

einsetzen, so erhalten wir

$$\left(\frac{d^2\underset{\sim}{n}}{d\tau^2}\right)^\alpha = \underbrace{\frac{d^2 n^\alpha}{d\tau^2}}_{\mathrm{I}} + \left(\partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\right) u^\sigma u^\mu n^\nu + \underbrace{\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\frac{du^\mu}{d\tau} n^\nu}_{\mathrm{II}} + \underbrace{2\Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu \frac{dn^\nu}{d\tau}}_{\mathrm{III}} + \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\nu_{\beta\gamma} u^\sigma u^\beta n^\gamma\,.$$

Als letzten Schritt ersetzen wir den Term I+III durch (9.13) und den Term II durch die Geodätengleichung (9.12) und erhalten so schließlich

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 \underset{\sim}{n}}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^{\alpha} = \left(\partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} + \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\sigma}\right) u^\sigma u^\mu n^\nu \tag{9.17}$$

Auf der linken Seite steht ein Tensor 1. Stufe, der Term $u^\sigma u^\mu n^\nu$ ist ein Tensor 3. Stufe. Demnach muß der Term in $(\cdots)$ ein Tensor 4. Stufe sein. Das ist (bis auf ein Vorzeichen) der **Riemann'sche Krümmungstensor**:

$$R^\alpha{}_{\mu\nu\sigma} := \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\sigma} - \Gamma^\alpha_{\sigma\gamma}\Gamma^\gamma_{\mu\nu} \tag{9.18}$$

Damit können wir (9.17) einfach schreiben als

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 \underset{\sim}{n}}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^{\alpha} = -R^\alpha{}_{\mu\nu\sigma} u^\sigma u^\mu n^\nu \,. \tag{9.19}$$

Wenn der Riemann'sche Krümmungstensor überall Null ist, bleiben anfänglich parallele Geodäten parallel, d.h. die Raumzeit ist flach. Ein von Null verschiedener Riemann-Tensor zeigt dagegen eine Krümmung der Raumzeit an.

9.3 Der Krümmungstensor

Der Krümmungstensor ist ein kompliziertes Objekt. Am einfachsten zu diskutieren ist er im lokalen Inertialsystem, weil hier alle Christoffel-Symbole verschwinden—nicht aber ihre Ableitungen:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = g_{\alpha\gamma} R^\gamma{}_{\beta\mu\nu} \overset{\text{LIS}}{=} \frac{1}{2}\left(\partial_\beta\partial_\mu g_{\alpha\nu} + \partial_\alpha\partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta\partial_\nu g_{\alpha\mu} - \partial_\alpha\partial_\mu g_{\beta\nu}\right) \tag{9.20}$$

In dieser Darstellung können wir insbesondere die Symmetrien des Krümmungstensors erkennen:

$$R_{\alpha\beta\nu\mu} = -R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{9.21a}$$
$$R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{9.21b}$$
$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = +R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{9.21c}$$
$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0 \tag{9.21d}$$

Als Tensorgleichungen gelten diese Symmetrien natürlich in jedem Koordinatensystem. Mit Hilfe dieser Symmetrien kann man zeigen, daß von den $4^4 = 256$ Einträgen des Riemann-Tensors nur 20 unabhängig sind.

Ebenfalls im lokalen Inertialsystem leicht zu beweisen ist die **Bianchi-Identität**

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0\,. \tag{9.22}$$

Die Verjüngung

$$R_{\beta\nu} = R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\nu} = g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{9.23}$$

heißt **Ricci-Tensor**. Aus (9.21c) folgt, daß der Ricci-Tensor symmetrisch ist,

$$R_{\beta\nu} = R_{\nu\beta}\,, \tag{9.24}$$

d.h. er hat nur 10 unabhängige Einträge. Die Verjüngung

$$R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} = g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu} \tag{9.25}$$

des Ricci-Tensors heißt **Krümmungsskalar**. Dies Größe ist besonders interessant, da ihr Wert unabhängig ist vom Koordinatensystem.

In einer flachen Raumzeit ist $R = 0$ und $R_{\beta\nu} = 0$, aber aus $R = 0$ bzw. $R_{\beta\nu} = 0$ kann man nicht schließen, daß die Raumzeit flach ist. Dazu muß man den vollen Riemann-Tensor $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ betrachten. Nur wenn $R_{\alpha\beta\mu\nu} = 0$ gilt, ist die Raumzeit flach. Das ist wichtig, denn die Einstein-Gleichung außerhalb von Massendichten lautet $R_{\beta\nu} = 0$ und kann trotzdem gekrümmte Raumzeiten als Lösung haben. Wie zum Beispiel die Schwarzschild-Geometrie.

9.4 Bemerkungen

9.1 Symmetrien In d Dimensionen hat der Riemann'sche Tensor d^4 Einträge. Auf Grund der Symmetrien (9.21) sind davon nur $d^2(d^2-1)/12$ unabhängig. Das ergibt 20 unabhängige Einträge für $d = 4$, 6 für $d = 3$ und gerade 1 unabhängigen Eintrag für $d = 2$. Für die auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius a definierte zweidimensionale Geometrie ist der Krümmungstensor z.B. $R_{1212} = a^{-2}$.

9.2 Normalkoordinaten Laut Äquivalenzprinzip können wir in jedem Punkt P der Raumzeit ein Koordinatensystem finden, in dem die Metrik in P der Minkowski-Metrik entspricht und ihre ersten Ableitungen nach den Koordinaten verschwinden. Wir können das Koordinatensystem darüberhinaus immer so wählen, daß P die Koordinaten $x^\mu = 0$ hat. Damit können wir für die Metrik in der Nähe von P ganz allgemein schreiben

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\alpha\nu\beta} x^\alpha x^\beta + \mathcal{O}\left(x^3\right)\,.$$

Die $R_{\mu\alpha\nu\beta}$ sind die Komponenten eines Tensors, da $g_{\mu\nu}$ und x^α tensorielle Größen sind. Wenn dieser Tensor die Symmetrien (9.21) erfüllt, dann ist das R aus dieser Entwicklung der Metrik der Riemann'sche Krümmungstensor im Punkt P.

Kontrollfragen zur 9. Vorlesung

1. Erläutern Sie, warum die gewöhnliche Ableitung eines Vektorfeldes kein Tensorfeld ist.
2. Wie ist die kovariante Ableitung eines Vektorfeldes definiert? Warum ist die wichtig?
3. Wie ist die geodätische Abweichung definiert und wie lautet ihre Bewegungsleichung?
4. Wie ist der Riemann'sche Krümmungstensor definiert?
5. Wieviele Einträge hat der Riemann'sche Tensor und wieviele davon sind unabhängig?
6. Wie ist der Ricci-Tensor definiert? Wieviele unabhängige Einträge hat er?
7. Wie ist der Krümmungsskalar definiert?
8. Der Ricci-Tensor einer Raumzeit verschwindet. Können Sie daraus schließen, daß die Raumzeit flach ist? Begründen Sie ihre Antwort!
9. Geben Sie die Bianchi-Identität an.