10 Die Einstein-Gleichung

In dieser Vorlesung wollen wir die Einstein-Gleichung, die Feldgleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie, aufstellen. Sie hat die Struktur

$$\begin{pmatrix} \text{Maß für die lokale} \\ \text{Krümmung der RZ} \end{pmatrix} = \text{Quelle der Gravitation}$$

Das Krümmungsmaß wird dabei eine Funktion des Riemann-Tensors sein. Bei der Quelle (rechte Seite) stellt sich die Frage, ob hier die Ruhmasse eines Objektes eingeht oder dessen relativistische Energie? Im klassischen Grenzfall ist beides identisch, aber in der Relativitätstheorie natürlich nicht.

Ein Gedankenexperiment zeigt, daß der Energieerhaltungssatz verletzt wird, wenn die Gravitation nur von der Ruhmasse erzeugt würde. Dazu betrachten wir eine perfekt verspiegelte Box, die sowohl Materie als auch Antimaterie enthält, wohlgetrennt voneinander in magnetischen Fallen. Ein Teilchen in grösserer Entfernung von der Box wird von der Masse in der Box angezogen und beschleunigt in Richtung Box. Sobald das Teilchen sehr nah bei der Box ist, schalten wir die magnetischen Fallen ab. Materie und Antimaterie zerstrahlen vollständig. Jetzt enthält die Box keine Masse mehr, nur noch Energie in Form von Photonen. Wenn diese Energie keine Gravitationswirkung hätte, würde unser Teilchen die Box passieren und seine gewonnene kinetische Energie bis ins Unendliche mitnehmen. Damit wäre der Energierhaltungssatz verletzt. Wir müssen also davon ausgehen, daß die Quelle der Gravitation die **relativistische Energie** ist. Die war in unserer Box die ganze Zeit über konstant.

10.1 Staub

Welche tensorielle Größe steht für die relativistische Energiedichte einer Masseverteilung? Betrachten wir dazu die allereinfachste Masseverteilung: Staub. Unter Staub verstehen wir Teilchen, die nicht miteinander wechselwirken und die sich lokal nicht relativ zueinander bewegen. Wir können deshalb immer ein lokales Inertialsystem finden, in dem die Staubpartikel in einer kleinen Box mit Volumen V_0 ruhen. Sei N die Anzahl der Staubteilchen in dieser Box. Die Anzahldichte ist dann $n_0 = N/V_0$, und da die Teilchen in der Box alle ruhen, ist die Energie jedes Teilchens einfach m. Die Energiedichte ist somit

$$\rho_0 = m\frac{N}{V_0}$$

Wenn wir die Box dagegen aus einem anderen lokalen Inertialsystem betrachten, in dem sich die Box mit Geschwindigkeit v bewegt, so ist die Box in Bewegungsrichtung

Lorentz-gestaucht, d.h. das Volumen $V = V_0\sqrt{1-v^2}$ ist kleiner und die Anzahldichte wird entsprechend größer,

$$n = \frac{N}{V} = \frac{N}{V_0\sqrt{1-v^2}} = \frac{n_0}{\sqrt{1-v^2}}$$

Das können wir tensoriell schreiben. Mit der 4er-Geschwindigkeit der Staubpartikel

$$u^\alpha = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}} \\ \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^t \\ v_x u^t \\ v_y u^t \\ v_z u^t \end{pmatrix}$$

erhalten wir

$$n = n_0 \cdot u^t \,.$$

Die relativistische Energie eines Staubteilchens ist in diesem Inertialsystem aber $p^t = mu^t$, weshalb wir für die Energiedichte den Ausdruck

$$\rho = np^t = \left(n_0 u^t\right)\left(mu^t\right) = \left(n_0 m\right) u^t u^t = \rho_0 u^t u^t$$

erhalten. Dabei ist $\rho_0 = n_0 m$ die Energiedichte im Ruhsystem des Staubs. Die ist natürlich ein Skalar, da alle Beobachter auf den gleichen Wert kommen. Wir können ρ somit als die t-t-Komponente eine Tensors zweiter Stufe,

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 u^\mu u^\nu \tag{10.1}$$

interpretieren. Das ist der **Energie-Impuls-Tensor** (für Staub). Dieser Tensor ist symmetrisch

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu} \,. \tag{10.2}$$

Per Konstruktion ist T^{tt} in jedem Bezugssystem die Energiedichte. Was aber bedeuten die anderen Komponenten?

Betrachten wir dazu eine Fläche A in der y-z-Ebene und

$$T^{tx} = \rho_0 u^t u^x = \left(n_0 m\right) u^t u^x = \left(n_0 u^t\right) m \left(u^t v_x\right) = np^t v_x = \frac{\left(nAv_x \mathrm{d}t\right) p^t}{A\mathrm{d}t} \,.$$

$Av_x\mathrm{d}t$ ist das Volumen der Staubteilchen, die im Intervall $\mathrm{d}t$ durch die Fläche A hindurchtreten, d.h. $nAv_x\mathrm{d}t$ ist die Anzahl der Staubteilchen, die in der Zeit $\mathrm{d}t$ die Fläche A passieren. Damit ist $T^{tx} = T^{xt}$ der **Energiefluß** (Energie pro Fläche und Zeit) in x-Richtung, und entsprechend stellen $T^{ty} = T^{yt}$ und $T^{tz} = T^{zt}$ den Energiefluß in y- bzw. z-Richtung dar.

Eine ähnliche Betrachtung führt uns auch zur Bedeutung der restlichen Komponenten von $T^{\mu\nu}$:

$$T^{yx} = \rho_0 u^y u^x = n_0 u^y m u^x = \underbrace{n_0 u^t}_{n} v_y p^x = \frac{nAv_y \mathrm{d}t}{A\mathrm{d}t} p^x \,.$$

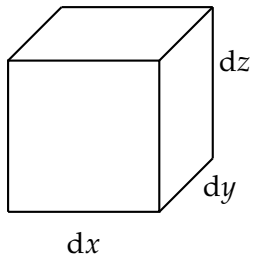

Abb. 10.1: Zum Beweis des Energie- und Impulserhaltungssatzes (10.4).

Damit ist T^{yx} der **Impulsfluß**, also der Fluß der x-Komponente des Impulses in y-Richtung, und Entsprechendes gilt für die anderen „rein räumlichen" Komponenten von $T^{\mu\nu}$.

Wenn wir also eine Platte der Fläche A senkrecht zur x-Richtung in den Strom der Staubteilchen halten, und diese Platte sowohl die Energie als auch den Impuls der Staubteilchen absorbiert, so liefert $T^{tx}A$ die Energie, die pro (Koordinaten-)Zeit absorbiert wird, und $T^{yx}A$ die y-Komponente des Impulses, der pro (Koordinaten-)Zeit absorbiert wird. Letzteres entspricht aber der Kraft, die der Staub auf die Platte ausübt. Damit ist T^{yx} die Kraft pro Fläche, also der Druck oder die Spannung, in y Richtung auf eine Platte senkrecht zur x-Richtung. Aus diesem Grund wird $T^{\mu\nu}$ manchmal auch **Energie-Spannungstensor** genannt.

Die Struktur des Energie-Impuls Tensor ist folglich

$$T^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} \text{Energiedichte} & \text{Energiefluss} \\ \hline \text{Impulsdichte} & \text{Spannungstensor} \end{array}\right). \tag{10.3}$$

Wir haben diese Struktur nur für „Staub" hergeleitet, aber Sie gilt ganz allgemein. 10.1

10.2 Erhaltung von Energie und Impuls

Wir wollen nun zeigen, daß der Erhaltungssatz für Energie und Impuls eines Teilchens beschrieben wird durch die Gleichung

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0\,. \tag{10.4}$$

Dazu betrachten wir identische Staubteilchen mit 4er-Geschwindigkeit $\underset{\sim}{u}$ in beliebiger Raumzeit. An jedem Weltpunkt P können wir ein lokales Inertialsystem konstruieren mit kartesischen Koordinaten t, x, y und z und verschwindenden Christoffel-Symbolen.

Wir betrachten eine infinitesimale Box mit Abmessungen $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ und $\mathrm{d}z$ und mit Mittelpunkt P. Der Energiefluß in die Box hinein durch die linke Seite ist

$$\begin{aligned}\rho v_x \mathrm{d}t \cdot \mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \left(\rho_0 u^t u^t\right) v_x \mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \rho_0 u^t u^x \mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \left(T^{tx}\right)_{\text{links}} \mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,,\end{aligned}$$

der Energiefluss aus der Box heraus durch die rechte Seite ist entsprechend $\left(T^{tx}\right)_{\text{rechts}} \mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. Die Energiebilanz in der Box des Stromes in x-Richtung ist folglich

$$\left[\left(T^{tx}\right)_{\text{links}} - \left(T^{tx}\right)_{\text{rechts}}\right] \mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left(-\frac{\partial T^{tx}}{\partial x}\mathrm{d}x\right) \mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Zusammen mit den entsprechenden Beiträgen der y- und der z-Richtung lautet der Energieeintrag in die Box

$$\mathrm{d}E_{\text{tot}} = \left[-\frac{\partial T^{tx}}{\partial x} - \frac{\partial T^{ty}}{\partial y} - \frac{\partial T^{tz}}{\partial z}\right] \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Da die Energie aber erhalten bleibt, muß die eingetragene Energie zu einer Erhöhung der Energie in der Box führen,

$$\mathrm{d}E_{\text{tot}} = \mathrm{d}\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \left(\frac{\partial T^{tt}}{\partial t}\right) \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,.$$

Beide Gleichungen für $\mathrm{d}E_{\text{tot}}$ zusammen ergeben

$$0 = \underbrace{\left[\frac{\partial T^{tt}}{\partial t} + \frac{\partial T^{tx}}{\partial x} + \frac{\partial T^{ty}}{\partial y} + \frac{\partial T^{tz}}{\partial z}\right]}_{\partial_\nu T^{t\nu}} \mathrm{d}t\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Genauso zeigt man durch Bilanzierung des Impulsflusses, daß die Impulserhaltung durch $\partial_\nu T^{i\nu} = 0$ ausgedrückt wird für $i = x, y, z$. Weil sich im lokalen Inertialsystem aber $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ auf $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ reduziert und man in jedem Weltpunkt ein solches LIS konstruieren kann, gilt (10.4) in beliebigen Koordinaten.

10.3 Ideale Fluide

Realistischer als „Staub“ ist eine Masseverteilung, in der individuelle Teilchen unabhängige Bewegungen machen, selbst wenn das Fluid als Ganzes ruht. Wenn die Teilchen dabei wie bei einem idealen Gas nicht untereinander wechselwirken, spricht man von einem idealen Fluid. Wie sieht der Energie-Impuls Tensor eines idealen Fluids aus? In dem Bezugssystem, im dem das ideale Fluid ruht, ist der Energie-Impuls Tensor gegeben durch

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}\,, \tag{10.5}$$

Dabei ist ρ die Energiedichte und p der Druck im Fluid, der natürlich aus dem Impulstransport durch die Teilchen herrührt plus der Tatsache, daß die Teilchen an der Begrenzung des Volumens elastisch reflektiert werden, weil das Fluid als Ganzes ja ruhen soll. Der Spannungstensor hat ausserhalb der Diagonalen keine von Null verschiedenen Einträge, weil ein ideales Fluid mangels Wechselwirkung der Teilchen keine Scherkräfte übertragen kann. Die Tatsache, daß auf seiner Diagonalen überall der gleiche Wert p steht, folgt aus der Isotropie (Pascal's Gesetz). Energiedichte ρ und Druck p hängen über die Zustandsgleichung des idealen Fluids voneinander ab.

Typischerweise ist ein ideales Fuid nicht in Ruhe sondern bewegt sich mit Vierer-Geschwindigkeit $\underset{\sim}{u}(x)$, die von Punkt zu Punkt variiert. Der Energie-Impuls Tensor wird deshalb im allgemeinen von $\underset{\sim}{u}(x)$ abhängen ebenso wie von $\rho(x)$ und $p(x)$. Die allgemeinste Form, die man für $T^{\mu\nu}$ als Funktion von $\underset{\sim}{u}$ und der Metrik $g^{\mu\nu}$ ansetzen kann, ohne Ableitungen zu verwenden, lautet $T^{\mu\nu} = Au^\mu u^\nu + Bg^{\mu\nu}$. Die Koeffizenten A und B werden dabei bestimmt durch Forderung, daß sich im Ruhsystem des Fluids (also für $u^\nu = (1,0,0,0)$), die Form (10.5) ergeben muss. Das impliziert

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\, u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}\,. \tag{10.6}$$

Auch hier haben wir die Symmetrie $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$ und die lokale Energie- und Impulserhaltung $\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$.

10.4 Der Einstein-Tensor

Kommen wir nun zur Einstein-Gleichung. Deren rechte Seite wird durch den Energie-Impuls-Tensor bestimmt, d.h. wir haben die Form

$$G^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \tag{10.7}$$

mit einer Konstanten κ und einem Tensor 2. Stufe G, dem sogenannten **Einstein-Tensor**. Was wissen wir über G? Aus (10.2) und (10.4) folgen

$$G^{\mu\nu} = G^{\nu\mu} \tag{10.8}$$

und

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0\,. \tag{10.9}$$

Darüberhinaus wird G eine Funktion des Riemann'schen Tensors sein. Ein offensichtlicher Kandidat ist der Ricci-Tensor

$$R^{\mu\nu} = g^{\mu\beta} g^{\nu\sigma} R_{\beta\sigma} = g^{\mu\beta} g^{\nu\sigma} R^\alpha{}_{\beta\alpha\sigma} = g^{\mu\beta} g^{\nu\sigma} g^{\alpha\gamma} R_{\alpha\beta\gamma\sigma}\,. \tag{10.10}$$

Dessen Symmetrie $R^{\mu\nu} = R^{\nu\mu}$ folgt aus der Symmetrie $R_{\alpha\beta\gamma\sigma} = R_{\gamma\sigma\alpha\beta}$ des Riemann-Tensors. Allerdings ist im Allgemeinen $\nabla_\nu R^{\mu\nu} \neq 0$, wovon man sich z.B. durch Nachrechnen in einem LIS überzeugen kann. Demzufolge kann $G^{\mu\nu}$ nicht nur aus $R^{\mu\nu}$ bestehen. Weitere Kandidaten sind die Metrik selbst ($g^{\mu\nu}$ ist symmetrisch, $\nabla_\nu g^{\mu\nu} = 0$) und Kontraktionen des Ricci-Tensors wie der Krümmungsskalar

$$R = g^{\beta\nu} R_{\beta\nu} = g^{\beta\nu} R^\alpha{}_{\beta\alpha\nu} = g^{\beta\nu} g^{\alpha\mu} R_{\alpha\beta\mu\nu}\,. \tag{10.11}$$

Wir machen daher den Ansatz

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} \tag{10.12}$$

mit Konstanten b und Λ. Das ist der allgemeinste Tensor 2. Stufe, den wir als lineare Funktion von Riemann-Tensor und Metrik bilden können. Wenn es uns gelingt, die Konstanten b und Λ so zu bestimmen, daß

$$\nabla_\nu \left(R^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu}\right) = 0 \tag{$*$}$$

gilt, so sollte (10.12) aus Gründen der Einfachheit (Occam's Razor) auch korrekt sein. Ansonsten müßten wir kompliziertere Terme (z.B. Produkte von Riemann-Tensoren) hinzunehmen.

Wegen $\nabla_\nu g^{\mu\nu} = 0$ reduziert sich $(*)$ auf

$$\nabla_\nu \left(R^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}R\right) \stackrel{!}{=} 0\,. \tag{10.13}$$

In der Tat kann man mit Hilfe der Bianchi-Identität

$$\nabla_\sigma R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0 \tag{10.14}$$

zeigen, daß (10.13) erfüllt werden kann. Dazu multiplizieren wir die Bianchi-Identität mit $g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}$ und summieren über die doppelten Indizes,

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} + \nabla_\nu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0\,.$$

Dabei haben wir die Metrik wegen $\nabla_\nu g^{\mu\nu} = 0$ jeweils unter die kovariante Ableitung ziehen dürfen. Der Vergleich mit dem Krümmungsskalar (10.11) liefert

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}R + \nabla_\nu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\sigma\mu} + \nabla_\mu g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}R_{\alpha\beta\nu\sigma} = 0$$

Mit den Symmetrien

$$R_{\alpha\beta\sigma\mu} = -R_{\mu\sigma\alpha\beta}$$

und

$$R_{\alpha\beta\nu\sigma} = -R_{\nu\sigma\beta\alpha}\,,$$

sowie

$$g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\left(-R_{\mu\sigma\alpha\beta}\right) = -R^{\gamma\nu}$$

und

$$g^{\gamma\sigma}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}\left(-R_{\nu\sigma\beta\alpha}\right) = -R^{\gamma\mu}$$

erhalten wir

$$\nabla_\sigma g^{\gamma\sigma}R - 2\nabla_\sigma R^{\gamma\sigma} = 0\,.$$

Das heißt, das wir (10.13) durch $b = -1/2$ erfüllen können. Aus historischen Gründen läßt man den Term $\Lambda g^{\mu\nu}$ weg und definiert den Einstein-Tensor als

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \tag{10.15}$$

und die Einstein-Gleichung als

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \,. \tag{10.16}$$

Wenn wir die Einstein-Gleichung mit $g_{\mu\nu}$ multiplizieren und

$$T := g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} = T^{\mu}{}_{\mu} \tag{10.17}$$

verwenden, so erhalten wir die skalare Gleichung

$$-R + 4\Lambda = \kappa T \,. \tag{10.18}$$

Wenn wir diese Gleichung wiederum mit $\frac{1}{2} g^{\mu\nu}$ multiplizieren und von (10.16) abziehen, so erhalten wir eine Version der Einstein-Gleichung, in der der Ricci-Tensor explizit gegeben ist:

$$R^{\mu\nu} = \kappa \left(T^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} T \right) + \Lambda g^{\mu\nu} \tag{10.19}$$

10.5 Der nichtrelativistische Grenzfall

Den noch fehlenden Werte der Konstanten κ und Λ erhalten wir aus der Forderung, daß die Einstein-Gleichung im nichtrelativistischen Grenzfall die Newton'sche Gleichung

$$\Delta\phi = 4\pi\rho \tag{10.20}$$

in geometrisierten Einheiten ergeben muß.

Dazu erinnern wir uns daran, daß die Gezeitenwirkung bei Newton durch die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2 n^i}{\mathrm{d}t^2} = -\eta^{ij} \left(\partial_k \partial_j \phi \right) n^k \tag{10.21}$$

beschrieben wird, wobei η^{ij} der „räumliche" Teil der Minkoswki-Metrik ist (also $\eta^{ij} = \delta^i_j$) und $\vec{n}$ der Abstandvektor zweier infinitesimal benachbarter Probemassen ist. Die korrespondierende ART Gleichung für die geodätische Abweichung war

$$\frac{\mathrm{d}^2 \underset{\sim}{n}}{\mathrm{d}\tau^2} = -R^{\alpha}{}_{\mu\nu\sigma} u^{\sigma} u^{\mu} n^{\nu} \,. \tag{10.22}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall sollte sich (10.22) auf (10.21) reduzieren. Dieser Grenzfall impliziert

(1) schwache Gravitation, d.h. die Raumzeit ist fast flach,

(2) alle Geschwindigkeiten $\ll 1$ und

(3) die Energiedichte $\rho = T^{tt}$ ist viel größer als die anderen Komponenten $T^{\mu\nu}$.

Aus (1) folgt, daß wir ein kartesisches Koordinatensystem mit t, x, y, z und Minkoswki-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ benutzen können und daß wir die kovariante Ableitung durch die gewöhnliche Ableitung ersetzen dürfen. Aus (2) folgt, daß für jede Vierergeschwindigkeit $u^t \simeq 1$ und $u^x = u^y = u^z \simeq 0$. Insbesondere ist $\tau \simeq t$.

Damit wird aus der räumlichen Komponente von (10.22)

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\underset{\sim}{n}}{\mathrm{d}\tau^2}\right)^i = -R^i{}_{\mu\nu\sigma}u^\sigma u^\mu n^\nu \simeq -R^i{}_{t\nu t}n^\nu = -R^i{}_{tkt}n^k\,,$$

wobei k nur über die räumlichen Indizes läuft. Die letzte Gleichung folgt aus $R^i{}_{ttt} = 0$. Der Vergleich mit (10.21) liefert

$$\eta^{ij}\left(\partial_k\partial_j\phi\right) \simeq R^i{}_{tkt}$$

und damit

$$\Delta\phi \simeq R^k{}_{tkt} = R^\alpha{}_{t\alpha t} = R_{tt}\,,$$

wobei wir erneut $R^t{}_{ttt} = 0$ verwendet haben. Da die Metrik in unserem Fall quasi flach ist, gilt

$$R^{tt} = g^{t\mu}g^{t\nu}R_{\mu\nu} \simeq \eta^{t\mu}\eta^{t\nu}R_{\mu\nu} = (-1)(-1)R_{tt} = R_{tt}\,.$$

und damit auch

$$\Delta\phi = R^{tt} = \kappa\left(T^{tt} - \frac{1}{2}\eta^{tt}T\right) + \Lambda g^{tt}\,.$$

Jetzt können wir noch Punkt (3) des nichtrelativistischen Grenzfalls verwenden:

$$T = g_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \simeq \eta_{\mu\nu}T^{\mu\nu} \simeq \eta_{tt}\rho = -\rho\,.$$

Letztlich erhalten wir also

$$\Delta\phi \simeq R^{tt} \simeq \kappa\left[\rho - \frac{1}{2}(-1)(-\rho)\right] - \Lambda = \frac{1}{2}\kappa\rho - \Lambda\,. \tag{10.23}$$

Damit das der Newton'schen Feldgleichung $\Delta\phi = 4\pi\rho$ entspricht, muß

$$\kappa = 8\pi \tag{10.24}$$

gelten sowie

$$\Lambda \ll 4\pi\rho\,. \tag{10.25}$$

Die Konstante Λ heißt **kosmologische Konstante**. Ihre Wirkung auf die Raumzeit wird aus (10.23) deutlich: sie wirkt (für $\Lambda > 0$) wie eine negative (!), homogene Massendichte. Gewöhnliche Masse- bzw. Energiedichten sind immer positiv und führen zu einer anziehenden Wirkung. Der Term mit der kosmologischen Konstanten kann daher eine globale Abstoßung bewirken. Diese wird in der Kosmologie mit dem Begriff „dunkle Energie“ umschrieben.

Durch genaue Vermessung der Planetenbahnen in unserem Sonnensystem können wir den Wert der kosmologischen Konstante in SI-Einheiten beschränken auf

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} \ll 1 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{kg/m^3}\,.$$

Wenn man eine von Null verschiedene kosmologische Konstante als Ursache für die beobachtete beschleunigte Expansion des Universums ansetzt, so erhält man einen Wert von

$$\frac{\Lambda}{8\pi G} \approx 0{,}7 \cdot 10^{-26}\,\mathrm{kg/m^3}\,.$$

10.6 Bemerkungen

10.1 Dichten in der Raumzeit und die Struktur des Energie-Impuls-Tensors. Die Dichte einer skalaren Größe wird in der Relativitätstheorie durch einen Vierervektor beschrieben. Die Dichte eines Vierervektors wird durch einen Tensor 2. Stufe beschrieben. Allgemein: die Dichte eines Tensors k-ter Stufe ist ein Tensor der Stufe $k+1$. Das liegt daran, daß sich Dichte auf ein räumliches Volumenelement ΔV bezieht, allgemein also auf eine dreidimensionale Hyperfläche in der vierdimensionalen Raumzeit. Dazu gehört aber eine Orientierung durch einen Normalenvektor $\underset{\sim}{n}$ auf dieser Hyperfläche. Die Dichte eines Vierervektors $\underset{\sim}{p}$ ist die Größe, die multipliziert mit $\underset{\sim}{n}\Delta V$ diesen Vierervektor ergibt: $p^\nu = \text{Dichte} \cdot n_\mu \Delta V$. Damit muss die Dichte ein Tensor zweiter Stufe sein:

$$p^\nu = T^{\nu\mu} n_\mu \Delta V.$$

Der Energie-Impuls-Tensor ist die Dichte des Energie-Impuls Vektors. Aus diesem Zusammenhang folgt auch ganz allgemein die Struktur (10.3) des Energie-Impuls-Tensors, siehe z.B. Kapitel 22.1 in J. B. Hartle. *Gravity*. Addison Wesley, 2003.

Kontrollfragen zur 10. Vorlesung

1. Masse kann in Energie umgewandelt werden und umgekehrt. Begründen Sie, warum auch die Energie gravitative Wirkung haben muß.
2. Welche tensorielle Größe beschreibt die Masse-Energiedichte?
3. Was versteht man in der ART unter **Staub** und wie lautet dessen **Energie-Impuls Tensor** ?
4. Was bedeutet die T^{tt} Komponente des Energie-Impuls Tensors?
5. Was bedeuten die T^{ti} Komponenten des Energie-Impuls Tensors für $i \in \{x, y, z\}$?
6. Was bedeuten die T^{ij} Komponenten des Energie-Impuls Tensors für $i, j \in \{x, y, z\}$?
7. Warum ist $\nabla_\mu T^{\nu\mu} = 0$?
8. Was versteht man in der ART unter einem **perfekten Fluid** und wie lautet dessen Energie-Impuls Tensor?
9. Wie lautet die Einstein-Gleichung? Erläutern Sie die Terme.
10. Wie kommt man auf den Wert der Konstanten in der Einstein-Gleichung?
11. Was versteht man unter der **kosmolgischen Konstanten**? Wie taucht sie in der Einstein-Gleichung auf und welche Auswirkung hat Sie qualitativ?
12. Woher wissen wir, daß die kosmologische Konstante nicht sehr groß sein kann (wenn sie überhaupt größer als Null ist)?